230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Cadre : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$.

I Convergence des séries numériques

Définition 1. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On note $\sum u_n$ cette suite. On note $R_n = \sum_{k=0}^\infty u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^\infty u_k$ le reste de la série à l'ordre n.

Définition 2. On dit que la série $\sum u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, sa limite est appelée somme et notée $\sum_{n=0}^\infty u_n$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$. Une série non convergente est divergente.

Exemple 3. *Si $u_n = q^n$ est une suite géométrique ($q \neq 1$), on a $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Donc la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$, et alors sa somme est $\frac{1}{1-q}$.*

Proposition 4. *Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.*

Théorème 5. *L'ensemble des séries numériques est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, dont l'ensemble des séries convergente est un sous-espace vectoriel.*

Remarque 6. *La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. On ne peut en revanche rien dire de la convergence d'une somme de séries divergentes.*

Exemple 7. $\sum(-1)^n + \sum(-1)^{n+1} = 0$.

Proposition 8. *Le terme général d'une série convergente converge vers 0, mais la réciproque est fausse.*

Exemple 9. $\sum \frac{1}{n}$ *diverge, mais* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Remarque 10. *Si u_n ne converge pas vers 0, on parlera de série grossièrement divergente.*

Définition 11. On dit que la série $\sum u_n$ est télescopique s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n = a_n - a_{n-1}$. On a alors $\sum_{k=0}^n = a_n - a_0$.

Exemple 12. *La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ diverge, la série de terme général $\frac{1}{n(n-1)}$ converge.*

II Séries à termes positifs

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à terme général positif.

1) Comparaison

Proposition 13. *Une série à termes positifs converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est majorée. Si la série diverge, c'est vers $+\infty$.*

Théorème 14. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

Théorème 15. *Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors :*

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^\infty u_n \leqslant \sum_{n=0}^\infty v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

Exemple 16. *Comme $\frac{1}{n(n-1)}$ est le terme général d'une série convergente, la suite $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.*

Exemple 17. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ *donne que* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *est divergente.*

Théorème 18. *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante continue par morceaux. Alors la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t)\,dt - f(n)$ converge. En particulier, $\sum f(n)$ et $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont même nature, et on a :*

(i) Si $\sum f(n)$ converge, alors $\int_{n+1}^\infty f(t)\,dt \leqslant \sum_{k\geqslant n} f(k) \leqslant \int_n^\infty f(t)\,dt$.

(ii) Si $\sum f(n)$ diverge, alors $\sum_{k\geqslant n} f(k) \sim \int_0^n f(t)\,dt$.

Application 19. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1, \beta > 1)$.*

Théorème 20. *Notons $S_n(u)$, $R_n(u)$ (resp. $S_n(v)$, $R_n(v)$) les sommes partielles et restes associés à u (resp. v). Alors :*

	$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n < \infty$	$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n = \infty$
$u_n = o(v_n)$	$R_n(u) = o(R_n(v))$	$S_n(u) = o(S_n(v))$
$u_n = \mathcal{O}(v_n)$	$R_n(u) = \mathcal{O}(R_n(v))$	$S_n(u) = \mathcal{O}(S_n(v))$
$u_n \sim v_n$	$R_n(u) \sim R_n(v)$	$S_n(u) \sim S_n(v)$

2) Critères de convergence

Théorème 21 (Règle de Cauchy)**.** *On pose $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$.*

(i) Si $L < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
(ii) Si $L > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 22. *La série $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.*

Théorème 23 (Règle de d'Alembert)**.** *Supposons u_n non nul à partir d'un certain rang. On pose $\ell = \liminf_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ et $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.*

(i) Si $L < 1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
(ii) Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exemple 24. *Pour $a > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{na}{n+1} = a$, donc la série de terme général $\frac{a^n}{n}$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$.*

Théorème 25 (Règle de Raab-Duhamel)**.** *Supposons u_n non nul à partir d'un certain rang. Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+\frac{a}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$, il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \frac{\lambda}{n^a}$.*

III Séries à termes quelconques

1) Absolue convergence

Définition 26. On dit que $\sum u_n$ est absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente. Une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

Théorème 27 (Riemann)**.** *Soit $\sum u_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ soit convergente de somme α.*

Proposition 28. *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.*

Proposition 29. $\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

Proposition 30 (Produit de Cauchy)**.** *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ est absolument convergente, et on a :*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$$

Application 31. $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$ *est un morphisme de groupes.*

2) Séries alternées

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Définition 32. Les séries alternées sont des séries de la forme $\sum (-1)^n u_n$.

Proposition 33. *Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée converge, et on a $|R_n| < a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 34. *En prenant $u_n = \frac{1}{n}$, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.*

Application 35. $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \gamma \ln 2 - \frac{\ln(2)^2}{2}$

Proposition 36 (Abel)**.** *Supposons que $u_n = a_n v_n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs tendant vers 0 et v_n est le terme général d'une série bornée (c'est-à-dire telle que la suite $(\sum_{k=0}^n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée). Alors $\sum u_n$ est convergente.*

Exemple 37. *La série de terme général $\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, où $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, est convergente pour $\alpha > 0$.*

IV Séries entières

Définition 38. On appelle série entière toute série de fonctions de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ où z est une variable complexe, et $a_n \in \mathbb{C}$.

Définition 39. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ le réel R défini par :

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \,\middle|\, \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| r^n \leqslant M\right\}$$

Théorème 40 (Abel angulaire)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 telle que $\sum a_n$ converge. On note f sa somme et :*

$$\Delta_\theta = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, 1 - z = \rho e^{i\varphi},\, \rho > 0,\, |\varphi| < \theta\right\} \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$$

Alors :

$$\lim_{\substack{z\to 1\\ z\in\Delta_\theta}} f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n$$

Application 41. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} = \ln(2)$

Théorème 42 (Taubérien faible)**.** *Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(z) = \ell$ existe, et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Alors $\sum a_n$ converge et $\ell = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$.*

Application 43 (Nombres de Catalan)**.** *On note C_n le nombre de parenthésages possibles d'un produit de $n+1$ facteurs. On a alors la relation $C_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$, et on obtient $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.*

Application 44 (Nombres de Bell)**.** *Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ avec la convention $B_0 = 1$, alors :*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ B_k = \frac{1}{e} \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^k}{n}$$

Développements

- Théorèmes d'Abel angulaire et taubérien faible (40,42) [Gou08]
- Nombres de Bell (44) [FGN13a]

Références

[El 11] M. El Amrani. *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions*. Ellipses

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse*. Ellipses

[FGN13d] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 1*. Cassini

[FGN13a] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1*. Cassini